Tutorato Algebra Lineare – 03/04/25

Esercizi della volta scorsa

1) Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile?

Soluzioni:

1) Se una matrice A ha 2 colonne uguali, allora $\det A = 0$.

Infatti, sapendo che il determinante cambia di segno quando si scambiano due colonne, si ha:

colonne

$$\det A = \det\left(A^1 | \cdots | A^i \underbrace{| \cdots |}_{=} A^j | \cdots | A^n\right) = -\det\left(A^1 | \cdots | A^j \underbrace{| \cdots |}_{=} A^i | \cdots | A^n\right) = -\det A$$

Assumo $A^i = A^j$

quindi $\det A = -\det A$, cioè $\det A = 0$.

Ne consegue che il determinante della matrice data è zero.

2)
$$\det\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\alpha \det\begin{pmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2}\alpha \det\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2}\alpha \det\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

sviluppo rispetto alla seconda colonna:

conviene perché ho tutte le entrate uguali ad α (quindi posso già raccogliere α)

$$= \alpha\left[(-1)(\beta - \alpha) + (1 - \alpha\beta) - (1 - \beta^2)\right]$$
$$= \alpha\left(\alpha - \beta + \cancel{1} - \alpha\beta - \cancel{1} + \beta^2\right)$$
$$= \alpha\left((\alpha - \beta) - \beta(\alpha - \beta)\right)$$
$$= \alpha(\alpha - \beta)(1 - \beta).$$

Quindi la matrice è invertibile se e solo se $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq \beta \wedge \beta \neq 1$.

SOLO per matrici 3×3 : metodo di Sarrus

$$\det \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right) \end{array}$$

Verificare la formula per esercizio (solo se volete davvero farlo!)

- "A mano" con la formula $\det A = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{3} a_{i\sigma(i)}$.
- Sviluppo rispetto una riga o una colonna.

IDEA INTUITIVA

Ad esempio: sviluppo rispetto alla prima colonna.

$$\det \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}} - a_{21} \det(\cdots) + a_{31} \det(\cdots)$$

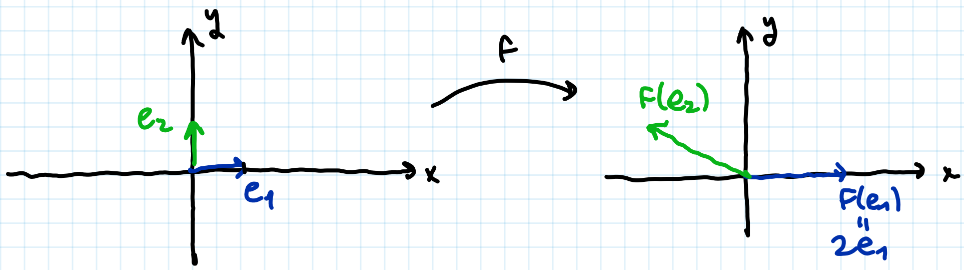
$$a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \boxed{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$

e similmente per gli altri due addendi.

DIAGONALIZZABILITÀ

Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R})$.

e consideriamo l'applicazione lineare $f = L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$$v \longmapsto A \cdot v$$



$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1$

$f(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

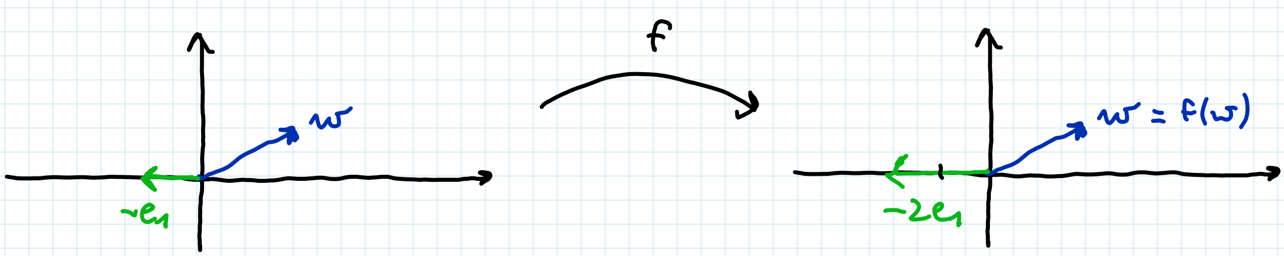
$f(e_1) = 2\, e_1 \leadsto e_1$ si dice un AUTOVETTORE per f di AUTOVALORE 2

Consideriamo $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$f(w) = A w = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = w.$$

Quindi w è un autovettore per f di autovalore 1

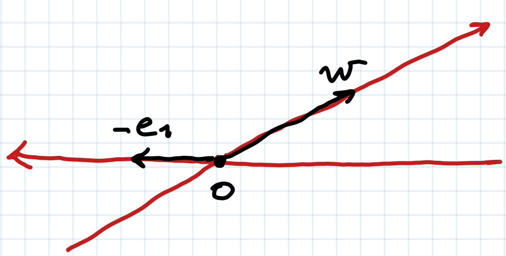
e_1 autovettore di autov. $2 \Rightarrow -e_1$ autovettore di autov. 2



Considero il sistema "di riferimento" dato dagli assi:

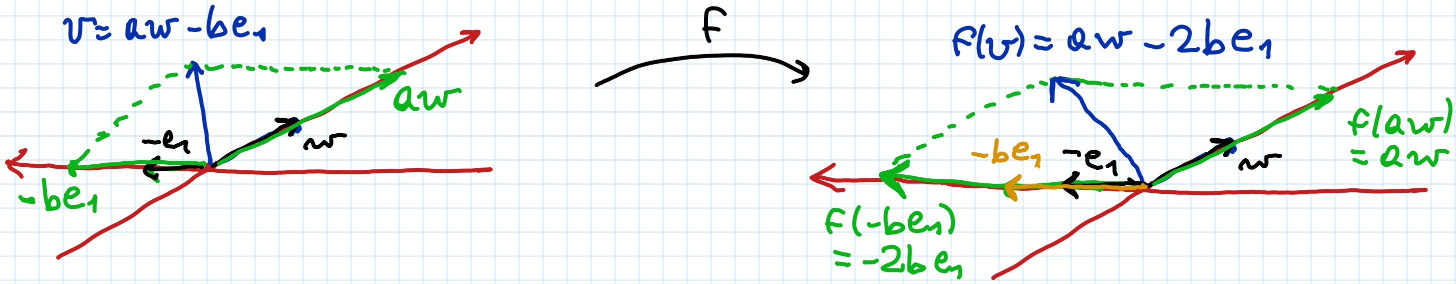
Span(w)

Span$(-e_1)$



In questo sistema, gli assi sono "preservati" da f, cioè sono rette f-INVARIANTI.

Ogni $v \in \mathbb{R}^2$ si scrive come $v = a w + b(-e_1)$, $a, b \in \mathbb{R}$.



$\mathcal{B} = \{w, -e_1\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$. Chi è la matrice associata a f in base $\mathcal{B}$?

$w = 1 \cdot w + 0 \cdot (-e_1)$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \left([f(w)]_{\mathcal{B}}, [f(-e_1)]_{\mathcal{B}} \right) = \left([w]_{\mathcal{B}}, [2(-e_1)]_{\mathcal{B}} \right)$$

$-2e_1 = 0 \cdot w + 2 \cdot (-e_1)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

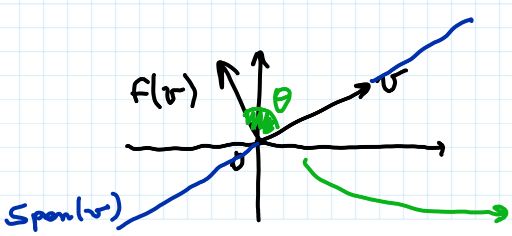
In questa base, f si comporta come una dilatazione: "$x \to x$, $y \to 2y$"

Ricordiamo che il legame tra $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ è dato dal cambio di base:

(vedi il Tutorato del 27/03/25)

$$\underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}_{D} = \underbrace{M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id)}_{M} \underbrace{M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)}_{A} \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id)}_{M^{-1}}.$$

<u>Esempio</u> [Rotazioni nel piano di angolo $\theta \in [0, 2\pi)$] $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rotazione (antioraria) di angolo θ



$\boxed{\theta = 0}$ ok (è Id) identità $\boxed{\theta = \pi}$ ok (è $-Id$)

$\boxed{\theta \neq 0, \pi}$ $\longrightarrow$ Niente da fare! NON CI SONO AUTOVETTORI <u>REALI</u>

(Non ci sono $v \neq 0$ t.c. $f(v) \in \mathrm{Span}(v)$)

In generale: vogliamo stabilire SE un'applicazione lineare (una matrice) è diagonalizzabile.

| cioè esiste una base rispetto alla quale la matrice associata è diagonale

Come si fa?

Sia A una matrice $n \times n$ (reale). Supponiamo che $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ sia un autovettore per A, cioè esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $A \cdot v = \lambda v$.

Allora:

$$A v - \lambda v = 0$$

$$A v - \lambda I v = 0 \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ matrice identità}$$

$$(A - \lambda I) v = 0 \implies v \in \ker(A - \lambda I).$$

$$\underset{v \neq 0}{\implies} \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}.$$

$$\underset{A - \lambda I \text{ NON invertibile}}{\implies} \det(A - \lambda I) = 0.$$

→ IL POLINOMIO CARATTERISTICO di A è $p_A(t) = \det(A - tI)$.

Possiamo quindi procedere in questo modo:

1. Troviamo gli autovalori. (Risolviamo l'equaz. polinomiale $p_A(t) = 0$)
2. Troviamo gli autovettori. (Risolviamo il sistema omogeneo $(A - \lambda I) v = 0$)

[oppure, equivalentemente, il sistema $A v = \lambda v$]

Abbiamo finito? NO

Esempio: Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora

1. $$p_A(t) = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2.$$

Gli autovalori di A sono le radici di $p_A(t)$: cioè $t = 1$ con molteplicità algebrica 2.

(2) $\ker(A-I) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ ha dimensione 1

risolvere il sistema $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Problema. la $\underbrace{\text{dimensione dell'autospazio}}_{\text{molteplicità geometrica}}$ $V_1(A) = \ker(A-I)$ è 1

di 1

mentre la molt. algebrica di 1 è 2.

NON TROVIAMO UNA BASE DI $\mathbb{R}^2$ COSTITUITA DA AUTOVETTORI PER A.

Gli autovettori per A sono solo i vettori $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $x_1 \in \mathbb{R}$: non possiamo trovarne due linearmente indipendenti.

Quindi, l'ultimo passaggio da effettuare è il seguente:

(3) Verifichiamo SE la molteplicità algebrica di λ coincide con la molteplicità geometrica di λ

$\dim(\ker(A-\lambda I))$

Se è vero per ogni autovalore λ, concludiamo che A è diagonalizzabile. Una base di autovettori per A si ottiene UNENDO delle basi degli autospazi.

Esempio ("super generale")

$V_{\lambda_1}(A) \rightsquigarrow$ base $v_1^{(1)}, \dots, v_{s_1}^{(1)}$

$\vdots \qquad \vdots$

$V_{\lambda_r}(A) \rightsquigarrow$ base $v_1^{(r)}, \dots, v_{s_r}^{(r)}$

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{v_1^{(1)}, \dots, v_{s_1}^{(1)}}_{V_{\lambda_1}(A)}, \dots, \underbrace{v_1^{(r)}, \dots, v_{s_r}^{(r)}}_{V_{\lambda_r}(A)}\}$$

$$\text{"}M_{\mathcal{B}}(A)\text{"} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix}\lambda_r & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Esempio (rotazioni nel piano)

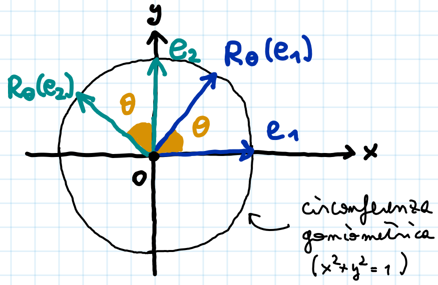
$R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rotazione di angolo $\theta \in [0, 2\pi)$

- antioraria
- intorno all'origine

Nella base canonica $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la matrice associata a R_θ è

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Infatti, basta vedere dove vengono mandati e_1, e_2:



$$R_\theta(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$R_\theta(e_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Abbiamo già visto "con gli occhi" che A non ammette autovettori (reali) se $\theta \neq 0, \theta \neq \pi$.

In effetti:

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} \cos\theta - t & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - t \end{pmatrix} = (\cos\theta - t)^2 + \sin^2\theta$$
$$= t^2 - 2\cos\theta \cdot t + 1$$

$p_A(t)$ ha radici REALI $\iff \frac{\Delta}{4} \geq 0 \iff \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta \geq 0$

Poiché $-\alpha^2 \leq 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la precedente è verificata solo per $\sin^2\theta = 0$, ossia $\theta \in \pi\mathbb{Z}$.

$(\theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$

Nel nostro caso, $\theta \in [0, 2\pi)$, quindi gli unici valori ammissibili sono $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Notiamo che in questi casi abbiamo

$A = I$ e $A = -I$.

Se $\theta \neq 0, \pi$, allora $p_A(t)$ NON ha radici reali, quindi A NON è diagonalizzabile.

E su $\mathbb{C}$?

Se $\theta \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$, allora $\frac{\Delta}{4} = -\sin^2\theta < 0$, quindi abbiamo due soluzioni complesse distinte (coniugate), date da

$$\cos\theta \pm i \sin\theta .$$

OSS. Ricordando la forma esponenziale dei numeri complessi, si ha

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

quindi gli autovalori di A sono $e^{\pm i\theta}$.

Poiché gli autovalori sono distinti, la loro molteplicità algebrica è 1 e coincide con la molteplicità geometrica. Quindi A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow$ c'è almeno un autovettore di autovalore λ

$\leadsto$ due autovalori distinti

$\Downarrow$

(almeno) due autovettori lin. indip.

Troviamo degli autovettori ⊛: $\lambda_\pm := \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$

Risolviamo il sistema: $(A-\lambda_\pm I)v = 0$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{C}$

con λ_- è analogo

$$A - \lambda_+ I = \begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda_+ & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda_+ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -i\sin\theta \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to iR_1} \begin{pmatrix} \sin\theta & -i\sin\theta \\ \sin\theta & -i\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1 \to \frac{1}{\sin\theta} R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⊛ EXTRA TUTORATO

Le soluzioni del sistema sono date da $\begin{cases} x = iy \\ y \text{ libero} \end{cases}$, cioè dai vettori $\begin{pmatrix} iy \\ y \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{C}$.

Quindi $\operatorname{Ker}(A - \lambda_+ I) = \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Analogamente troviamo

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda_- I) = \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Una base di $\mathbb{C}^2$ composta da autovettori per A è data da

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

In questa base, la matrice associata a R_θ è data da

$$M_{\mathcal{B}}(R_\theta) = \begin{pmatrix} \overbrace{e^{i\theta}}^{\lambda_+} & 0 \\ 0 & \underbrace{e^{-i\theta}}_{\lambda_-} \end{pmatrix}.$$

Infatti

$$A\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_+ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_- \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$